<u>Θέματα προαγωγικών εξετάσεων στη Γεωμετρία</u>
<u>Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ</u>

ΘΕΜΑ 1ο

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Κάθε διχοτόμος ισοσκελούς τριγώνου είναι διάμεσος και ύψος του.

ii. Το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών κάθε τριγώνου λέγεται βαρύκεντρο.

iii. Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.

iv. Αν σε ένα ισοσκελές τρίγωνο, μια γωνία του ισούται με 60°, τότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

v. Αν Ρ είναι ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου, τότε η διακεντρική ευθεία του διχοτομεί τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

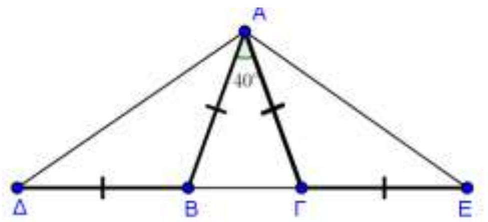
μονάδες 5x2

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι δύο ορθές..

μονάδες 15

ΘΕΜΑ 2ο
(36087)

Στο διπλανό σχήμα ισχύουν $\Delta B = BA = A\Gamma = \Gamma E$ και $B\hat{A}\Gamma = 40^\circ$.Να αποδείξετε ότι:



α) $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E = 110^\circ$.

(Μονάδες 10)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.

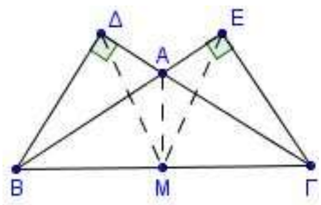
(Μονάδες 10)

γ) Το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 3ο
(1680)

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} > 90^\circ$. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ προς το Α φέρουμε τμήματα ΒΔ και ΓΕ κάθετα στις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

(Μονάδες 10)

β) Αν Μ το μέσο της ΒΓ, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $M\Delta = ME$

(Μονάδες 8)

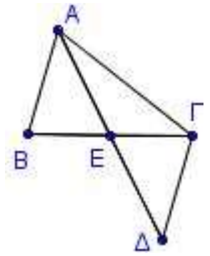
ii. Να αποδείξετε ότι η ΑΜ διχοτομεί τη γωνία ΔΜΕ.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4^o

(37166)

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών Α,Β,Γ,Δ και Ε και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωρίο Ε ισαπέχει από τα χωριά Β,Γ και επίσης από τα χωριά Α και Δ.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. η απόσταση των χωριών Α και Β είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ.

(Μονάδες 5)

ii. αν οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν.

(Μονάδες 5)

iii. τα χωριά Β και Γ ισαπέχουν από το δρόμο ΑΔ.

(Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου ΑΓ που ισαπέχει από τα χωριά Α και Δ.

(Μονάδες 7)

Λύση

<u>ΘΕΜΑ 1ο</u>

α) ΛΛΣΣΣ
β) Θεωρία

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u>

α) Επειδή $AB = A\Gamma$, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ και έχει $B = \Gamma$.
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow 2B = 140^\circ \Leftrightarrow B = 70^\circ = \Gamma$$

Οι γωνίες ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι παραπληρωματικές των ίσων γωνιών Β και Γ, άρα

$$AB\Delta = A\Gamma E = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:
1) $\Delta B = \Gamma E$
2) $BA = A\Gamma$ και
3) $AB\Delta = A\Gamma E = 110^\circ$

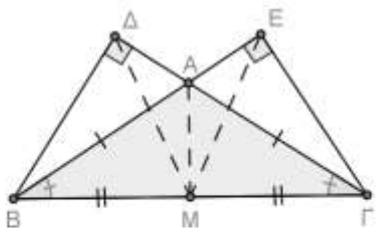
Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

γ) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα έχουν και $A\Delta = AE$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u>

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΑ και ΑΕΓ έχουν:
1) ΑΒ=ΑΓ και
2) $\Delta\hat{A}\Gamma = E\hat{A}\Gamma$ σαν κατακορυφήν γωνίες.

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία τους ίσες, είναι ίσα, οπότε έχουν $B\Delta = \Gamma E$.



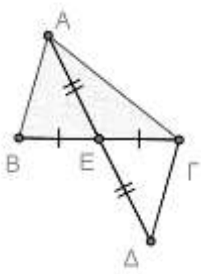
β) i. Το ΔΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΔΒΓ, άρα $\Delta M = \dfrac{B\Gamma}{2}$ (1). Το ΕΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΕΒΓ, άρα $EM = \dfrac{B\Gamma}{2}$ (2). Από τις (1),(2) προκύπτει ότι $M\Delta = ME$.

ii. Επειδή $M\Delta = ME$ και $A\Delta = AE$, τα Μ, Α ισαπέχουν από τα Δ και Ε, άρα η ΜΑ είναι μεσοκάθετος του ΔΕ. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΜΔΕ, η ΜΑ είναι μεσοκάθετος της βάσης ΔΕ , άρα είναι και διχοτόμος της γωνίας ΔΜΕ.

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

α) i. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΕΔ έχουν:
1) $AE = E\Delta$
2) $BE = E\Gamma$ και
3) $AEB = \Gamma E\Delta$ ως κατακορυφήν.

Με βάση το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν και $AB = \Gamma\Delta$.



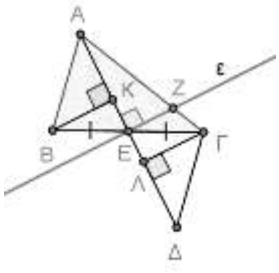
ii. Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΕΔ είναι ίσα και οι γωνίες ΑΒΕ και ΕΓΔ είναι ίσες. Όμως οι γωνίες αυτές είναι και εντός εναλλάξ των ΑΒ,ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ, άρα οι
ευθείες ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες.

iii. Έστω ΒΚ, ΓΛ οι αποστάσεις των Β, Γ από την ΑΔ.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΚ και ΓΛΕ έχουν:

1) $\mathrm{BE} = \mathrm{E}\Gamma$ και

2) $\mathrm{AEB} = \Gamma\mathrm{E}\Delta$ ως κατακορυφήν, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν και $\mathrm{BK} = \Gamma\Lambda$.



β) Γνωρίζουμε ότι ένα σημείο ισαπέχει από δύο άλλα όταν βρίσκεται στη μεσοκάθετο του τμήματος που ορίζουν τα σημεία αυτά. Για το λόγο αυτό θεωρούμε τη μεσοκάθετο (ε) του ΑΔ η οποία τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Το Ζ είναι το ζητούμενο σημείο.